DETERMINANTS

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre deux

Le déterminant d'une matrice n'est définit que pour une matrice ***carrée****.*

- **Do2-1 : *Déterminant de deux vecteurs***

Soit E un K espace vectoriel de dimension 2, soit $B=\{e_1,e_2\}$ une base de E et soient x et y deux éléments de E.

$x=a\,e_1+c\,e_2$ et $y=b\,e_1+d\,e_2$

On appelle déterminant de *x* et *y* par rapport à la base B et on note *det*$_B$ *(x, y)*, le scalaire

$$det_B(x,y)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\,d-b\,c$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre deux

Exemple

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $B_{\mathbb{R}^2}=\left\{(1,0),(0,1)\right\}$ une base de *E*

Soient $x=(2,1)\,et\,y=(5,2)$ deux éléments de E

.

Le déterminant de *x* et *y* par rapport à la base B

$$det_B(x,y)=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-5\times 1=-1$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre deux

- **Do2-2 : *Proposition***

Soit E un K espace vectoriel de dimension 2, soit $B=\{e_1,e_2\}$ une base de E et soient x et y deux éléments de E.

Les deux vecteurs x et y sont libres si et seulement si

$$det_B(x,y)\neq 0$$

Exemple

Soients *x* et y 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ / $x=(2,1)\,et\,y=(5,2)$;

$\alpha x+\beta y=(0,0) \Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow$ *x* et y sont linéairement indépendant

On vérifie que $det_B(x,y)=-1\neq 0$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre deux

- **Do2-3 : *Déterminant d'une matrice***

Soit *A* une matrice d'ordre 2, $A \in \mathcal{M}_2(2)$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

On appelle déterminant de *A* et on note *det (A)*, le scalaire

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 4 = -10$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre trois

- **Do3-1 : *Déterminant de trois vecteurs***

Soit E un K espace vectoriel de dimension 3, soit une base de E $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et soient x, y et z trois éléments de E.

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \qquad y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \qquad z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$$

On appelle déterminant de x, y et z par rapport à la base B et on note det_B *(x, y, z)*, le scalaire

$$det_B(x,y,z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3 - z_1 y_2 x_3$$

$$= x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) + y_1(z_2 x_3 - x_2 z_3) + z_1(x_2 y_3 - y_2 x_3)$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre trois

- **Do3-1 : *Déterminant d'une matrice d'ordre 3***

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

  - **Mineur M_{ik} :**

Déterminant de la sous matrice obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne

$$\begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{a'} & \boxed{b' \quad c'} \\ \cancel{a''} & \boxed{b'' \quad c''} \end{bmatrix} \longleftarrow M_{11} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre trois

- ***Déterminant d'une matrice d'ordre 3 (suite)***

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{a'} & b' & c' \\ \cancel{a''} & \cancel{b''} & \cancel{c''} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre trois

- ***Déterminant d'ordre 3 (suite)***

On peut **développer** un déterminant **suivant une ligne ou une colonne**.

Suivant la première colonne :

$\det(A) = a\, M_{11} - a' M_{21} + a'' M_{31}$

Suivant la première ligne :

$\det(A) = a\, M_{11} - b M_{12} + c M_{13}$

Le signe que l'on met devant le mineur M_{ik} est $(-1)^{i+k}$.

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre trois

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suivant la deuxième ligne :

$$det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = -1(-1+0) + 2(2-15) - 0(0+5)$$

$$det(A) = -25$$

DETERMINANTS

Propriétés des déterminants d'ordre deux

- **Propriétés -1 : *Propriétés des déterminants d'ordre 2***

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

DETERMINANTS

Propriétés des déterminants d'ordre deux

Propriétés -2 : *Propriétés des déterminants d'ordre 2* (suite)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

DETERMINANTS

Déterminants d'ordre n

- **Det-1 : *Déterminant d'ordre n***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$detA = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \; ; \; i = 1, 2, ..., n-1 \text{ ou } n$$

$$detA = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} \; ; \; j = 1, 2, ..., n-1 \text{ ou } n$$

M_{ij} est un mineur d'ordre (n - 1) obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Remarque :

Pour simplifier les calculs, choisir une ligne ou une colonne comportant le maximum de zéros.

DETERMINANTS

Propriétés des déterminants

- **Propriétés -3 : *Propriétés des déterminants d'ordre n***

Soit A une matrice carrée d'ordre n

1) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

2) $\det({}^tA) = \det(A)$

3) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

4) $\det(A^n) = (\det(A))^n$

DETERMINANTS

Propriétés des déterminants

- **Propriétés -3 : *Propriétés des déterminants d'ordre n***

5) Déterminant d'une matrice diagonale

$$\det\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$$

6) Déterminant d'une matrice triangulaire

$$\det\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$$

DETERMINANTS

Propriétés des déterminants

- **Propriétés -4 : *Propriétés des déterminants d'ordre n***

7) Déterminant d'une matrice inversible

Soit A une matrice inversible, c'est-à-dire, une matrice A telle qu'il existe une matrice A^{-1} vérifiant :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Alors

det (A) ≠0

et $det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{det(A)}$

DETERMINANTS

Propriétés des déterminants

- **Propriétés -4 : *Propriétés des déterminants d'ordre n***

  8) *Manipulation sur les lignes*

$$det\begin{bmatrix} \boxed{l_1} \\ \vdots \\ \boxed{l_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j l_j} \\ \vdots \\ \boxed{l_n} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \boxed{l_1} \\ \vdots \\ \boxed{l_i} \\ \vdots \\ \boxed{l_n} \end{bmatrix}$$

  9) *Manipulation sur les colonnes*

$$det\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j c_j & \cdots & c_n \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_n \\ & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

DETERMINANTS

Comatrice

- **Comatrice-1 : *Cofacteur d'une matrice***

  Le cofacteur d'une matrice M est défini par

$$\Delta_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$$

  Où M_{ik} est le mineur de la matrice M

- **Comatrice-2 : *Définition d'une comatrice***

  Le comatrice d'une matrice M est défini par

$$com(A)=\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & .. & .. & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & .. & .. & \Delta_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & .. & .. & \Delta_{2n} \end{bmatrix}=\left(\Delta_{jk}\right)_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq n}$$

DETERMINANTS

Matrice inversible

- **Matrice inversible-1 : *Matrice inverse***

On appelle matrice inverse d'une matrice carrée *M,* si elle existe, notée A^{-1} et vérifiant

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

A^{-1} est défini par $A^{-1} = \frac{{}^t com(A)}{det(A)}$ $\quad det(A) \neq 0$

où ${}^t com(A)$ est le transposé de la comatrice de *A*
et $det(A)$ le determinant de A

DETERMINANTS

Vecteurs linéairement indépendants

- **Vecteurs-1 : *Vecteurs linéairement indépendants de R^n***

Soit { $u_1,\ldots,u_n$ } n vecteurs de R^n. Alors $u_1,\ldots,u_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si le *déterminant de la matrice dont les colonnes sont formées par ces vecteurs est différent de 0*.

Exemple

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants

car : $\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$

DETERMINANTS

Rang d'un systèmes de vecteurs

- **Vecteurs-2 :** ***Rang d'un système de vecteurs***

Le **rang** du système de vecteurs $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est *l'ordre du plus grand sous déterminant* **non nul** que l'on peut extraire de la matrice dont les colonnes sont constituées par ces vecteurs.

Exemple

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTS

Rang d'un systèmes de vecteurs

Vecteurs-1 : Exemple (suite)

Matrice associée à $\{u_1, u_2, u_3\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Rang $\{u_1, u_2, u_3\} = 3$. Les vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ forment une partie libre de R^4.